第二十届华罗庚金杯少年数学邀请赛

初赛试卷（小学高年级组 C 卷）

（时间：2015 年 3 月 14 日 8:00—9:00）

一、选择题（每小题 10 分，满分 60 分）

1、计算：$(\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}+\frac{17}{72})\times120-\frac{1}{3}\div\frac{1}{4}=$______.

A 42　　B 43　　C $15\frac{1}{3}$　　D $16\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】原式$=\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)\right]\times120-\frac{1}{3}\div\frac{1}{4}$

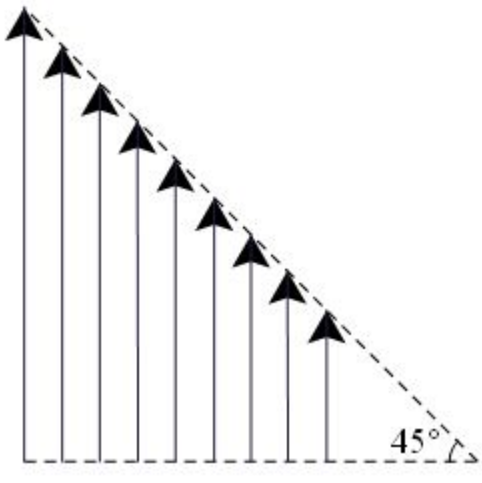
$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)\times120-\frac{1}{3}\div\frac{1}{4}$

$=\frac{13}{36}\times120-\frac{4}{3}$

$=\frac{130}{3}-\frac{4}{3}$

$=42$

2、如图，有一排间距相同但高度不等的小树，树根成一条直线，树顶也成一条直线，这两条直线成 45 度角，最高的小树高 2.8 米，最低的小树高 1.4 米，那么从左向右数第 4 棵树的高度是______米.



A 2.6　　B 2.4　　C 2.2　　D 2.0

【答案】C

【解析】一共有 8 棵树，树的高度成等差数列，最左侧为 2.8 米，最右侧为 1.4 米，则公差为$(2.8-1.4)\div(8-1)=0.2$（米），则从左往右数第 4 棵树的高度为$2.8-0.2\times(4-1)=2.2$（米），选 C.

3、春季开学后，有不少同学都将部分压岁钱捐给山区的贫困学生；事后，甲、乙、丙、丁4位同学有如下的对话：

甲：“丙、丁之中至少有1人捐了款”

乙：“丁、甲之中至多有1人捐了款”

丙：“你们3人中至少有2人捐了款”

丁：“你们3人中至多有2人捐了款”

已知这4位同学说的都是真话且其中恰有2位同学捐了款，那么这2位同学是______.

A 甲、乙　　*B* 丙、丁　　*C* 甲、丙　　*D* 乙、丁

【答案】*D*

【解析】由丙的话可知：丙没有捐款；再由甲的话可知：丁捐了款；再由乙的话可知:丁、甲之中最多有1人捐款.由此推知，甲没有捐款，乙捐了款，捐款的两人为乙和丁，选 *D*.

4、六位同学考试的平均成绩是92.5分，他们的成绩是互不相同的整数，最高的99分，最低的76分，那么按分数从高到低居第三位的同学的分数至少是______.

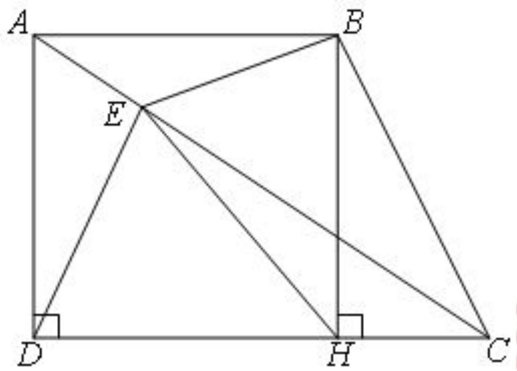
A 94　　*B* 95　　*C* 96　　*D* 97

【答案】*B*

【解析】六位同学的平均成绩为92.5分，因此这六人的总分为$92.5\times6=555$（分）.又最高分为99，最低分为76，因此剩下四人的分数和为380分.要使第三名的同学分数尽可能小，那么得使另外三人的分数尽可能大.而第二名最高为98分，而第四名第五名分数小于第三名，所以第三名至少为：（380－98）÷3＋1＝95（分），选 *B*.

5.如图，BH 是直角梯形 $ABCD$ 的高，E 是梯形对角线 AC 上一点：如果 ΔDEH 、ΔBEH ΔBCH 的面积依次为56、50、40，那么 ΔCEH 的面积是______.

A 32　　*B* 34　　*C* 35　　*D* 36



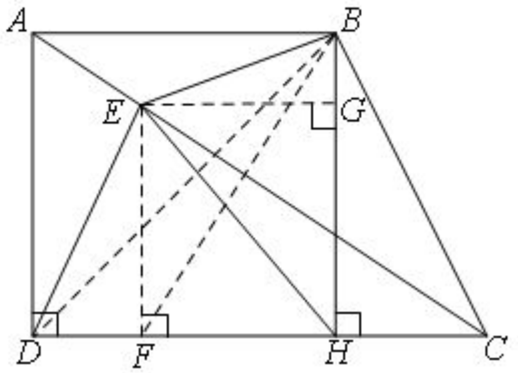
【答案】*B*

【解析】作 $EF\perp CD$ ，$EG\perp BH$

可知 $S_{\Delta BDF}=S_{\Delta ADF}=S_{\Delta ADE}$， $S_{\Delta ADC}=S_{\Delta BDC}$，因此有：

$S_{\Delta CDE}=S_{\Delta ADC}-S_{\Delta ADE}=S_{\Delta BDC}-S_{\Delta BDF}=S_{\Delta BFC}$，而 $S_{\Delta BFC}=S_{\Delta BFH}+S_{\Delta BCH}=S_{\Delta BEH}+S_{\Delta BCH}=90$；

因此 $S_{\Delta CHE}=S_{\Delta EDC}-S_{\Delta HDE}=90-56=34$，选 *B*.



6.一个边长为 1 的小正方形组成的 $n\times n$ 的方格网，用白色或黑色对每个小正方形涂色，要求满足在任意矩形的 4 个角上的小正方形不全同色，那么正方形 n 的最大值是_____.

A 3　　*B* 4　　*C* 5　　*D* 6

【答案】 *B*

【解析】 假设白色块为 0，黑色块为 1，那么：可以构造出 $n=4$ 的情况，如下图；

以下证明 n 不能等于 5，若 $n=5$，那么因为白色和黑色是相同情况的，所以第一行中不妨假设白色块比黑色块多，那么黑色块的数量为 0 个、1 个或 2 个，同时每一列都是相同的，所以经过调换行，可以得到第一行的前三个数为 0 0 0.

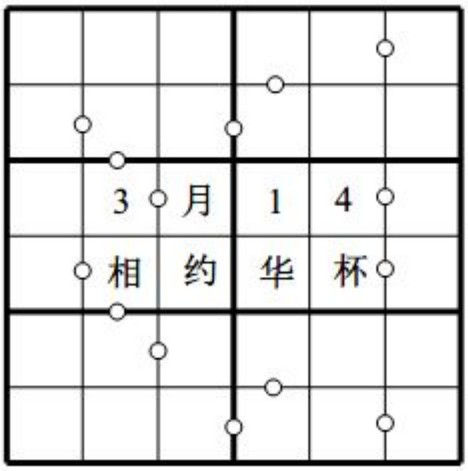
而第一行为 0 0 0 时，其他行最多出现 1 个 0，那么第二、三、四行的前三个数只能为 0 1 1、1 1 0 以及 1 0 1，同时这三种情况只能出现一次，所以第五行的前三个数无论怎么排列，均会与前四行出现能组成四个角颜色相同的矩形，因此矛盾.

所以 n 最大为 4.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

二、填空题（每小题 10 分，满分 40 分）

7、在每个格子中填入 1~6 中的一个，使得每行、每列及每个 2×3 长方形内（粗线段围成）数字不重复；如果小圆圈两边格子中所填的数的和是合数，其他相邻两格所填的数的和是质数，那么四位数“相约华杯”=_______.



【答案】4123

【解析】如下图，第三行信息最多，所以从第三行开始分析.

A	3	月	1	4	B
C	相	约	华	杯	D

因为第三行存在 1、3、4，所以 A 为 2，5，6 之一，而 3 与 A 的和是质数，所以 A 为 2.

在 A 所在的长方形中，还剩下 1、4、5、6 没有使用.而 3 与“相”的和是质数，所以“相”为 4.“相”与“约”的和为质数，“约”为 1.“约”与“月”的和为质数，“月”为 6，剩下的 C 即为 5.

第三行只剩下数字 5，所以 B 为 5.

在 B 所在的长方形中，还剩下 2、3、6 没有使用.而 4 与“杯”的和为质数，所以“杯”为 3.“杯”与“华”的和为质数，所以“杯”为 2，剩下的 D 就是 6.

这两行填完如下图：

2	3	6	1	4	5
5	4	1	2	3	6

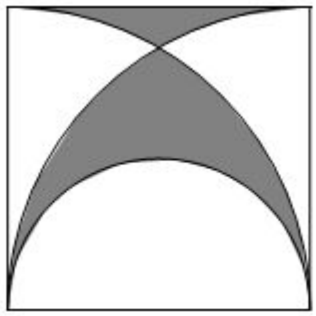
所以“相约华杯”为 4123

8 整数 n 一共有 10 个约数，这些约数从小到大排列，第 8 个是 $\frac{n}{3}$，那么整数 n 的最大值是______.

【答案】162

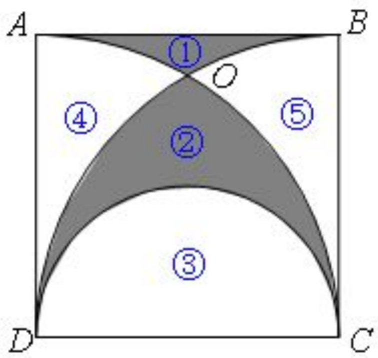
【解析】因为 n 有 10 个约数，所以 n 的因数分解形式为 $n=a^1b^4$.由于第 8 个是 $\frac{n}{3}$，所以第 3 个约数为 3，那么第 1 个约数是 1，第 2 个约数是 2. 即 n 有因数 2 和 3，要使 n 尽可能大，则 $a=2$，$b=3$，所以 $n=2^1\times3^4=162$.

9、在边长为 300 厘米的正方形中，如图放置了两个直角扇形和一个半圆，那么两块阴影部分的面积差是______平方厘米，两块阴影部分的周长差是______厘米.（$\pi=3.14$）



【答案】15975,485

【解析】（1）



$S_{正ABCD}=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$，$S_{扇形DAC}=S_2+S_3+S_4$，$S_{扇形CBD}=S_2+S_3+S_5$，

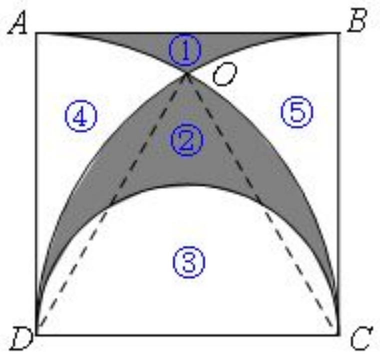
所以 $S_{扇形DAC}+S_{扇形CBD}-S_{正ABCD}=S_2+S_3-S_1$.

$S_{扇形DAC}=S_{扇形CBD}=\frac{1}{4}\pi\times300^2=70650$，$S_{正ABCD}=300^2=90000$，$S_3=\frac{1}{2}\pi\times150^2=35325$，

所以，阴影部分的面积差$=S_2-S_3=S_{扇形DAC}+S_{扇形CBD-}S_{正ABCD}-S_3=70650\times2-90000-35325$

$=15975$

（2）



连接 CO、DO，则 $CO=DO=CD$,所以 ΔOCD 是等边三角形，$\angle ODC=\angle OCD=60°$，

图形 2 的周长=$\frac{1}{3}\pi\times300\times2+\pi\times150=1099$，图形 1 的周长=$\frac{1}{6}\pi\times300\times2+300=614$，所以：阴影部分的周长差=$1099-614=485$.

10.A 地、B 地、C 地、D 地依次分布在同一条公路上，甲、乙、丙三人分别从 A 地、B 地、C 地同时出发，匀速向 D 地前进.当甲在 C 地追上乙时，甲的速度减少 40%；当甲追上丙时，甲的速度再次减少 40%，甲追上丙后 9 分钟，乙也追上了丙，这时乙的速度减少 25%；乙追上丙后再行 50 米，3 人同时到 D 地.已知乙出发时的速度是每分钟 60 米，那么甲出发时的速度是每分钟______米，A、D 两地间的路程是______米.

【答案】125，1630

【解析】由于最后同时到达，所以甲追上丙后二者速度相等，乙追上丙后二者速度相等.

乙出发时的速度为 60 米/分钟，遇到丙后速度变为：$60\times(1-25\%)=45$（米/分钟），所以丙的速度为 45 米/分钟，可以推知甲在追上丙后的速度变为 45 米/分钟，在追上乙后追上丙之前速度为 $45\div(1-40\%)=75$（米/分钟），甲出发时的速度为 $75\div(1-40\%)=125$（米/分钟）.

甲在 C 地追上乙，设从此时起追上丙花了 t 分钟，则在乙追上丙时也追上了甲，此时甲走的路程为 $(75t+45\times9)$ 米，乙走的路程为 $60(t+9)$，列方程得：$75t+45\times9=60(t+9)$，解得 t=9.由于此后又走了 50 米到达 D 地，所以 CD 的距离为：$75t+45\times9+50=1130$（米）.

由于甲从 C 地花了 9 分钟追上了乙，所以此时丙到 C 的距离为 $75\times9-45\times9=270$,即甲从 A 地到 C 地，丙走了 $270\div45=6$（分钟），那么 AC 的距离为 $125\times6=750$（米），所以 AD 的距离为 $1130+750=1880$（米）.