

2015 年“数学花园探秘”科普活动 六年级组初试试卷 A 详解

一. 填空题 I (每题 8 分, 共 32 分)

1. 计算: $(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143}) \times 2015 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【考点】分数裂项

【难度】☆☆

【答案】930

【分析】 $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143} = (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{11} - \frac{1}{13}) \times \frac{1}{2} = \frac{6}{13}$,

$$\frac{6}{13} \times 2015 = 6 \times 5 \times 31 = 930$$

2. 如图, 一道除法竖式中已经填出了“2015”和“0”, 那么被除数是_____.

$$\begin{array}{r}
 \square \square \square \\
 \square \square \square \overline{) 2 \square \square \square \square} \\
 \underline{\square \ 0 \ \square} \\
 \square \square \ 1 \ \square \\
 \underline{\square \square \ 5} \\
 \square \square \square \\
 \square \square \square \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

【考点】除法数字谜

【难度】☆☆

【答案】20685

【分析】根据减法特点, 得到下左图:

利用确定的两行乘积, 除数只能是 105, 填出一些确定的数字, 如下中图:

从下面的减法推断出, 商的个位只能是 6 或 7, 不难尝试出 6 是不行的, 最终得到下右图:

$$\begin{array}{r}
 \square \square \square \\
 \square \square \square \overline{) 2 \square \square \square \square} \\
 \underline{\square \ 0 \ \square} \\
 \square \square \ 1 \ \square \\
 \underline{\square \square \ 5} \\
 \square \square \square \\
 \square \square \square \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \square \square \square \\
 \square \square \square \overline{) 2 \square \square \square \square} \\
 \underline{\square \ 0 \ \square} \\
 \square \square \ 1 \ \square \\
 \underline{\square \square \ 5} \\
 \square \square \square \\
 \square \square \square \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \square \square \square \\
 \square \square \square \overline{) 2 \square \square \square \square} \\
 \underline{\square \ 0 \ \square} \\
 \square \square \ 1 \ \square \\
 \underline{\square \square \ 5} \\
 \square \square \square \\
 \square \square \square \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

3. A 牌电池的广告语是“一节更比六节强”，意义是 A 牌电池比其他电池更耐用。我们就假定 1 节 A 电池的电量是 B 电池的 6 倍。有两种耗电速度一样的时钟，现在同时在甲钟里装了 4 节 A 电池，乙钟里装了 3 节 B 电池。结果乙时钟正常工作了 2 个月就耗尽了，那么甲时钟还能正常工作_____月。

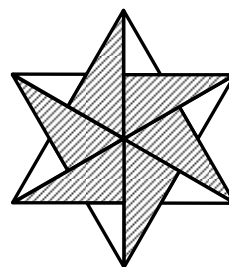
【考点】基础应用题

【难度】☆

【答案】14

【分析】乙钟 2 个月耗 3 节 B 电池，甲钟相当于有 24 节， $24 \div 3 \times 2 = 16$

4. 右图六角星的 6 个顶点恰好是一个正六边形的 6 个顶点。那么阴影部分面积是空白部分面积的_____倍。

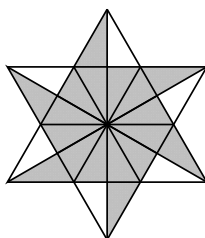


【考点】图形分割

【难度】☆☆

【答案】3

【分析】如下图将原图形分割为完全相同的 24 个小三角形，其中空白部分 6 块，阴影部分 18 块，显然阴影部分面积是空白部分的 3 倍。



二. 填空题（每题 10 分，共 40 分）

5. 一个正整数除以 3! 后所得结果中因数个数变为原来因数个数的 $\frac{1}{3}$ ，那么符合条件的 A 最小是_____。

【考点】因数个数定理

【难度】☆☆☆

【答案】12

【分析】设 $A = 2^x \times 3^y \times p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_n^{a_n}$ ，则 $B = A \div 3! = 2^{x-1} \times 3^{y-1} \times p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_n^{a_n}$

$$\text{则 } (x+1)(y+1)(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1) = 3 \times [xy(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)]$$

即 $(x+1)(y+1) = 3xy$ ， xy 都取 1 不满足此式，所以取 $x=2, y=1, a_1 \sim a_n = 0$ 得到最小值 12

6. 有一批机器，共 500 台，每台使用了同一种类型的零件 6 个。这种一周内报废的零件必须在本周末换新零件。所有新零件第一周末有 10% 报废，第二周末有 30% 报废，最后的 60% 会在第三周末报废，没有零件能使用到第四周。那么，在第三周末需要换新的零件数是_____个。

【考点】分百应用题

【难度】☆☆

【答案】1983

【分析】第三周第一次换的零件 $3000 \times 60\% = 1800$ 个

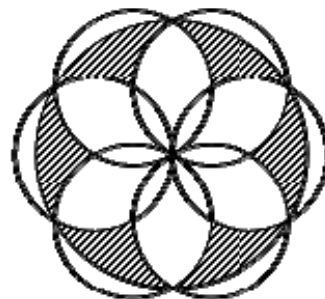
第一周换上的第三周又换的零件 $3000 \times 10\% \times 30\% = 90$ 个

第二周换上的第三周又换的零件 $3000 \times 10\% \times 30\% = 90$ 个

连接三周的零件 $3000 \times 10\% \times 10\% \times 10\% = 3$ 个

$1800 + 90 + 90 + 3 = 1983$

7. 图中大圆的面积是 120，那么，阴影部分面积是_____。



【考点】圆与扇形

【难度】☆☆☆☆

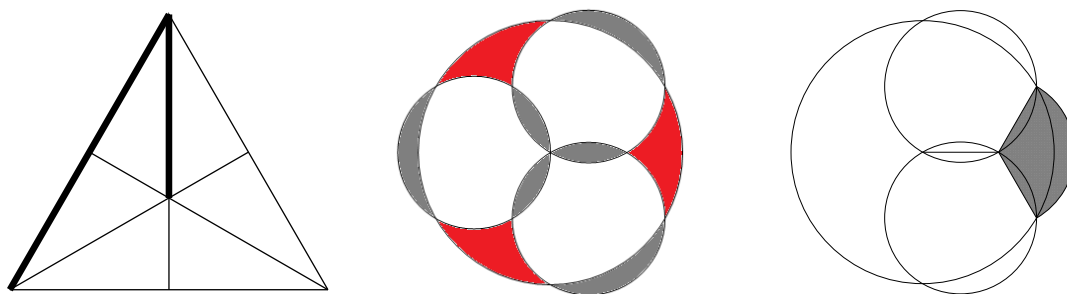
【答案】40

【分析】设大圆半径和小圆半径分别为 $2R$ 和 $2r$ ，画出大小圆半径会发现它们同处一个正三角形，如图 1，两条粗线分别为大圆半径和小圆半径，由正三角形性质和勾股定理，有

$R^2 + (3r)^2 = (2R)^2 \Rightarrow R^2 = 3r^2$ ，这说明大圆面积和小圆面积是 3 倍关系，即小圆面积为 40；

如图 2，由于三个小圆面积等于大圆面积，所以图中红色部分面积等于灰色部分；

如图 3，可以看出，图 2 中的两种阴影部分拼在一起可以形成扇形，一共可以形成 6 个 120 度扇形，总和为 2 个小圆，又因为两种阴影部分面积相等，所以所求面积为一个小圆面积，40。



上排从左至右：图 1、图 2、图 3

8. 甲、乙、丙三户人家打算订阅报纸，共有 7 种不同的报纸可供选择，已知每户人家都订三份不同的报纸，并且知道这三户人家每两户所订的报纸恰好有一份相同，那么三户人家共有_____多少种不同的订阅方式。

【考点】计数问题

阿【难度】☆☆☆

【答案】5670

【分析】甲户有 $C_7^3 = 35$ 种选择；

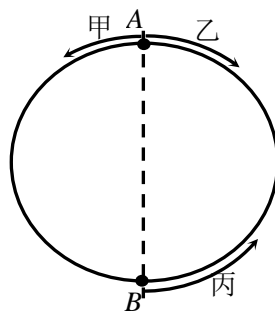
乙户要选甲户订的报纸订一种，另两种从甲没订过的选，所以有 $C_3^1 \times C_4^2 = 18$ 种选择；

丙户要么选择甲乙都订的报纸，再选甲乙都没订的（就剩两种了），或者从甲乙订的互相不同的那两份报纸中各挑一份，再挑个甲乙都没订的，所以有 $C_2^1 \times C_2^1 \times C_2^1 + 1 = 9$ 种选择；

$$35 \times 18 \times 9 = 5670 \text{ 种}$$

三. 填空题（每题 12 分，共 48 分）

9. 如图，A、B 为圆形轨道一条直径的两个端点. 甲、乙、丙三个微型机器人在环行导轨上同时出发，作匀速圆周运动. 甲、乙从 A 出发，丙从 B 出发；乙顺时针，甲、丙逆时针. 出发后 12 秒钟甲到 B，再过 9 秒钟甲第一次追上丙时恰好也和乙第一次相遇；那么当丙第一次到 A 后，再过_____秒钟，乙才第一次到 B.



【考点】环形跑道

【难度】☆☆☆

【答案】56

【分析】速度、时间、路程只涉及了时间，则可以设路程，求速度.

设半周长为 $[12, 21] = 84$ ，则甲的速度为 $84 \div 12 = 7$ ；

甲用 $12 + 9 = 21$ 秒追上丙，可见甲丙的速度差为 $84 \div 21 = 4$ ，则丙的速度为 $7 - 4 = 3$ ；

乙丙 21 秒相遇，可见乙丙的速度和为 $84 \div 21 = 4$ ，则乙的速度为 $4 - 3 = 1$ ；

丙到达 A 需要 $84 \div 3 = 28$ （秒），乙到达 B 需要 $84 \div 1 = 84$ （秒）；

可见，丙到达 A 后 $84 - 28 = 56$ （秒）乙到达 B.

10. 珊珊和希希各有若干张积分卡.

珊珊对希希说：“如果你给我 2 张，我的张数就是你的 2 倍.”

希希对珊珊说：“如果你给我 3 张，我的张数就是你的 3 倍.”

珊珊对希希说：“如果你给我 4 张，我的张数就是你的 4 倍.”

希希对珊珊说：“如果你给我 5 张，我的张数就是你的 5 倍.”

后来发现以上四句话恰有两句正确，两句不正确，最后希希给了珊珊几张积分卡之后她们的张数就一样多了. 那么，原来希希有_____张积分卡.

【考点】逻辑推理

【难度】☆☆☆

【答案】 15

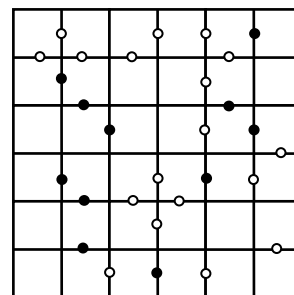
【分析】 由最后一句话，希希的积分卡多

| | 希希原有 | 珊珊原有 | 希希 > 珊珊所需 x 的取值 | 总数 | 总数取值 |
|-----|--------|--------|-------------------|------|------------------------------|
| 第一句 | $x+2$ | $2x-2$ | $x \leq 3$ | $3x$ | $3x \leq 9$ ，即 3、6、9 |
| 第二句 | $3x-3$ | $x+3$ | $x \geq 2$ | $4x$ | $4x \geq 8$ ，即 8、12、16、... |
| 第三句 | $x+4$ | $4x-4$ | $x \leq 2$ | $5x$ | $5x \leq 10$ ，即 5、10 |
| 第四句 | $5x-5$ | $x+5$ | $x \geq 3$ | $6x$ | $6x \geq 18$ ，即 18、24、30、... |

即只能二四两句是对的，再利用两次总数相等，两人原有的积分卡也相等列出方程：

$$\begin{cases} x+3=y+5 \\ 4x=6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}, \text{ 所以希希原有 } 3 \times 6 - 3 = 15 \text{ 张}$$

11. 在空格内填入数字 1~6，使得每行每列数字不重复，黑点两边的数是两倍的关系，白点两边的数差为 1。那么第四行所填数字从左往右前 5 位组成的五位数是_____。


【考点】 黑白点数独

【难度】 ☆☆☆☆

【答案】 21436

【分析】 先分析几个情况

- 两个格之间有黑点则只能是 (1,2)、(2,4)、(3,6)，即两个格都一定不会是 5
- 如果两个格之间有黑点，两个格都不能是 2 的话，则只能是 (3,6)
- 如果两个格之间有黑点，一个格确定，则只有在这个格是 2 的时候不确定另一个格是 1 还是 4，其他时候都能确定另一个数，但假如有一个格是 1 或 4，则另一个格一定是 2
- 如果一排三个连续的格有两个黑点，则一定是 (1,2,4)；
- 如果有一排连续的数中间都是白点，则一定是按顺序排列的连续数字；

然后综合利用数独条件和黑白点条件来分析题目，(注意题目并没有说不标黑白点的地方就不满足黑白点的条件，所以不能利用这一点)：

利用第二列的条件得到图 1；

利用第一、二行的条件得到图 2；

利用第五列、第三行的条件得到图 3；

利用第四行(注意利用条件 2)的条件得到图 4(题目所求已经得到了)；

完整图如图 5 所示。

| | | | | | |
|---|---|---|--|--|--|
| 4 | 5 | | | | |
| 3 | 6 | | | | |
| | 3 | 6 | | | |
| 2 | | | | | |
| | 2 | | | | |
| | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| 3 | 6 | 2 | 4 | 5 | 1 |
| | 3 | 6 | | | |
| 2 | | | | | |
| | 2 | | | | |
| | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| 3 | 6 | 2 | 5 | 4 | 1 |
| 5 | 3 | 6 | 1 | 2 | 4 |
| 2 | | | | | |
| | 2 | | | | |
| | | | | | |

上排从左至右：图 1、图 2、图 3；下排从左至右：图 4、图 5

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| 3 | 6 | 2 | 5 | 4 | 1 |
| 5 | 3 | 6 | 1 | 2 | 4 |
| 2 | 1 | 4 | 3 | 6 | 5 |
| | 2 | | | | |
| | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| 3 | 6 | 2 | 5 | 4 | 1 |
| 5 | 3 | 6 | 1 | 2 | 4 |
| 2 | 1 | 4 | 3 | 6 | 5 |
| 6 | 2 | 5 | 4 | 1 | 3 |
| 1 | 4 | 3 | 6 | 5 | 2 |

12. 请参考《2015 年“数学花园探秘”科普活动初赛试题评选方法》作答.