

## 2016 年“数学花园探秘”科普活动 六年级组初试试卷 A

(测评时间：2015 年 12 月 19 日 8:30—9:30)

学生诚信协议：活动期间，我确定没有就所涉及的问题或结论，与任何人、用任何方式交流或讨论。我确定以下的答案均为我个人独立完成的成果。否则愿接受本次成绩无效的处罚。

我同意遵守以上协议 签名：\_\_\_\_\_

### 一. 填空题 I (每小题 8 分, 共 32 分)

1. 算式  $2016 \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}}$  的计算结果是\_\_\_\_\_.

**【答案】** 1024

**【解析】** 将分母  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$  加上  $\frac{1}{32}$  再减去  $\frac{1}{32}$ , 变为  $2 - \frac{1}{32} = \frac{63}{32}$ , 那么算式变形  $2016 \times \frac{32}{63} = 32 \times 32 = 1024$ .

2. 彤彤和林林分别有若干张卡片, 如果彤彤拿出 6 张给林林, 林林的卡片数将变为彤彤的 3 倍, 如果林林给彤彤 2 张, 林林的卡片数将变为彤彤的 2 倍. 那么林林原有\_\_\_\_\_张卡片.

**【答案】** 66

**【解析】** 方法一：将彤彤和林林的卡片总数分为 12 份.

第一次：彤彤给林林 6 张卡片后，林林的卡片数是彤彤的 3 倍，那么此时林林有 9 份，彤彤有 3 份.

第二次：林林给彤彤 2 张卡片后，林林的卡片数是彤彤的 2 倍，那么此时林林有 8 份，彤彤有 4 份.

从第一次到第二次，林林的卡片数减少了  $6+2=8$  张，减少了 1 份，那么第一次林林的 9 份共有  $8 \times 9 = 72$  张，那么林林本来有  $72 - 6 = 66$  张卡片.

方法二：设林林原有卡片  $x$  张，彤彤原有卡片  $y$  张，根据题意列方程组得：

$$\begin{cases} x+6=3(y-6) \\ x-2=2(y+2) \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} x=66 \\ y=30 \end{cases}, \text{林林原有卡片 66 张.}$$

3. 如图，一道除法竖式中已经填出了“2016”和“0”，那么被除数是\_\_\_\_\_.

$$\begin{array}{r} \phantom{\square\square\square}\square\square\square \\ \square\square\square \overline{) \square\square\square\square 0} \\ \underline{\phantom{\square\square}\square\square 6} \\ \phantom{\square\square}\square\square 1 \square \\ \phantom{\square\square}\underline{\phantom{\square}\square\square 0} \\ \phantom{\square\square}\phantom{\square}\square 2 \square \\ \phantom{\square\square}\phantom{\square}\underline{\phantom{\square}\square \phantom{\square}} \\ \phantom{\square\square}\phantom{\square}\phantom{\square} 0 \end{array}$$

**【答案】** 83720

【解析】竖式如图所示

$$\begin{array}{r}
 \square\square\square \\
 \square\square\square \overline{) \square\square\square\square 0} \\
 \underline{\square\square 6} \\
 \square\square 1\square \\
 \underline{\square\square 0} \\
 \square 2\square \\
 \underline{\square\square\square} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \square\square\square \\
 \square\square\square \overline{) \square\square\square 2 0} \\
 \underline{\square\square 6} \\
 \square\square 1 2 \\
 \underline{\square\square 0} \\
 \square 2 0 \\
 \underline{\square 2 0} \\
 0
 \end{array}$$

由于除数乘以商的后两位，末位都是 0，而乘以商的第一位末位是 6，可知商的后两位都是 5. 又由四位数减三位数得到两位数，根据“黄金三角”可知必为  $10xx-9xx$ . 由  $920 \div 5=184$  可得除数，根据除数与商首位乘积是三位数，且末位为 6，得商首位为 4，那么可以填出所有数字.

$$\begin{array}{r}
 \square 5 5 \\
 \square\square\square \overline{) \square\square 7 2 0} \\
 \underline{\square\square 6} \\
 1 0 1 2 \\
 \underline{9 2 0} \\
 9 2 0 \\
 \underline{9 2 0} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4 5 5 \\
 1 8 4 \overline{) 8 3 7 2 0} \\
 \underline{7 3 6} \\
 1 0 1 2 \\
 \underline{9 2 0} \\
 9 2 0 \\
 \underline{9 2 0} \\
 0
 \end{array}$$

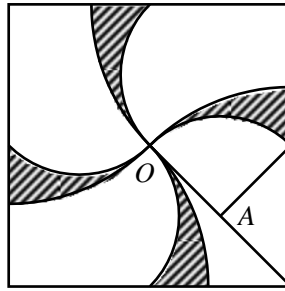
4. 每场篮球比赛都分为四节. 在某场比赛中，加西亚在前两节中投篮 20 次，命中 12 次，在第三节中，他一共投篮 10 次，但命中率有所下降，只有前两节总体命中率的 50%，在最后一节中，命中率有所回升，比第三节提高了  $\frac{1}{3}$ ，最后全场命中率为 46%. 那么加西亚在第四节一共投中\_\_\_\_\_次.

【答案】8

【解析】第一节命中率为  $12 \div 20 \times 100\% = 60\%$ ，那么第三节命中率为  $60\% \div 2 = 30\%$ ，第三节投中的次数为  $10 \times 30\% = 3$ （次）. 前三节共投篮 30 次，命中 15 次. 第四节命中率为  $30\% \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 40\%$ ，设第四节投中的次数为  $2a$  次，那么投篮次数为  $5a$  次，全场投篮  $5a+30$  次，命中  $2a+15$  次，命中率为 46%，可得  $(2a+15) : (5a+30) = 23:50$ ，解得  $a=4$ ，那么第四节一共投中 8 次.

## 二. 填空题II (每小题 10 分, 共 40 分)

5. 如图，正方形边长为 80 厘米， $O$  为正方形中心， $A$  为  $OB$  中点，在正方形内以  $A$  点为圆心， $OA$  为半径的圆，以  $B$  点为圆心， $OB$  为半径的圆与正方形的一边围成了一个特殊的图形. 将这个图形绕  $O$  点顺时针旋转三次能够得到一个风车的形状. 那么这个风车（阴影部分）的面积是\_\_\_\_\_平方厘米. ( $\pi$  取 3.14)



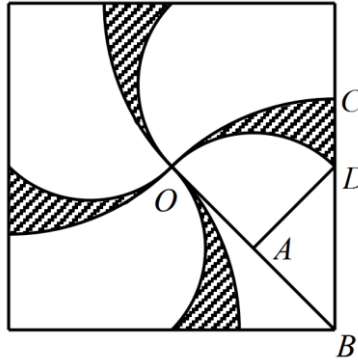
【答案】912

【解析】设以  $OB$  为直径的弧与正方形的边交于  $C$  点，以  $OA$  为直径的弧与正方形的边交于  $D$  点，那么  $S_{OCD} = S_{扇OBC} - S_{扇OAD} - S_{\triangle ABD}$ 。其中  $S_{扇OBC} = \frac{1}{8} \times \pi \times OB^2$ ，

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times OA^2 = \frac{1}{8} OB^2, \quad S_{扇OAD} = \frac{1}{4} \times \pi \times OA^2 = \frac{1}{4} \times \pi \times \frac{1}{4} OB^2 = \frac{1}{16} \times \pi \times OB^2,$$

$$\text{那么 } S_{OCD} = \frac{1}{16} \times \pi \times OB^2 - \frac{1}{8} OB^2 = 228 \text{ (平方厘米),}$$

所以阴影部分面积为  $228 \times 4 = 912$  (平方厘米)。



6. 对于自然数  $N$ ，如果在  $1 \sim 9$  这九个自然数中至少有六个数是  $N$  的因数，则称  $N$  是一个“六合数”，则在大于 2000 的自然数中，最小的“六合数”是\_\_\_\_\_。

【答案】2016

【解析】解法一：容易发现最小的六合数为 24，它的 6 个因子为 1, 2, 3, 4, 6, 8 (5, 7, 9 均与 8 互质，若用 5, 7, 9 替换 8，那么 5, 7 与 6 互质，9 与 4 互质，六合数也一定大于 30, 42, 36)。那么大于 2000 的自然数中，最小的能整除 24 的为 2016。下面排除 2000-2016 的自然数中的六合数。

能被 5 整除的数  $2005 = 5 \times 401$ ， $2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67$ ， $2015 = 5 \times 13 \times 31$ ，均不是六合数；

能被 7 整除的数  $2002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13$ ， $2009 = 7 \times 7 \times 41$ ， $2014 = 2 \times 19 \times 53$ ，均不是六合数；

能被 9 整除的数  $2007 = 9 \times 223$  不是六合数，因此在大于 2000，小于 2016 的数中，没有六合数。

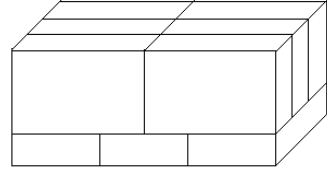
解法二：

寻找大于 2000 的 5、6、7、8、9 的倍数，如下表所示：

5	6	7	8	9
2005	2004	2002	2008	2007
2010	2010	2009	2016	2016
2015	2016	2016		

如果一个数是 1 到 9 中 6 个数的倍数，至少是 5、6、7、8、9 中两个数的倍数，第一个满足条件的是 2010，但  $2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67$  不满足条件；第二个数是 2016， $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$ ，是 1、2、3、4、6、7、8、9 的倍数，满足条件，则最小的“六合数”是 2016。

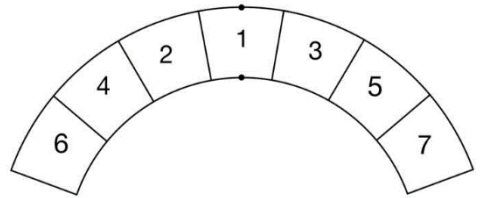
7. 右图是由9块相同的长方体摆放而成的大长方体, 已知大长方体的表面积是360平方厘米, 那么一个小长方体的表面积是\_\_\_\_\_平方厘米.



【答案】88

【解析】设小长方形的长、宽、高分别是  $a, b, c$ , 由图可以观察到  $2a = 3b$ ,  $a = 3c$ , 所以  $b = 2c$ . 由大长方形表面积等于 360 可知  $2 \times [2a \times (b+c) + a \times (b+c) + 2a \times b] = 360$ , 即  $c^2 = 4$ . 小长方形的表面积是  $2 \times (a \times b + b \times c + a \times c) = 2 \times (6c^2 + 3c^2 + 2c^2) = 22c^2 = 88$ .

8. 跑跑家族七人要分别通过右图中的七个门完成挑战; 第一个人可以任选一个门激活, 完成挑战后将会激活左右相邻的门; 下一个人可以在已激活的门中任选一个未被挑战的门挑战, 完成挑战后将会激活左右相邻门中未被激活的门; 以此类推. 结果跑跑家族七人全都完成了挑战, 按照他们完成挑战的次序将七个门的编号排序将会得到一个七位数. 这个七位数一共有\_\_\_\_\_种不同可能.



【答案】64

【解析】若第一人挑战 6 或 7, 分别只有 1 种可能的顺序;

若第一人挑战 4 或 5, 分别有  $\frac{A_6^6}{A_1^1 A_5^5} = 6$  (种) 可能;

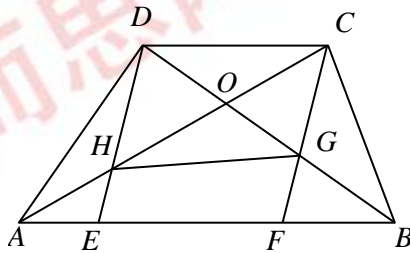
若第一人挑战 2 或 3, 分别有  $\frac{A_6^6}{A_2^2 A_4^4} = 15$  (种) 可能;

若第一人挑战 1, 则有  $\frac{A_6^6}{A_3^3 A_3^3} = 20$  (种) 可能;

所以一共有  $2 \times (1+6+15) + 20 = 64$  (种).

### 三. 填空题III (每小题 12 分, 共 48 分)

9. 如图, 四边形  $EFCD$  是平行四边形. 如果梯形  $ABCD$  的面积是 320, 四边形  $ABGH$  的面积是 80, 那么三角形  $OCD$  的面积是\_\_\_\_\_.



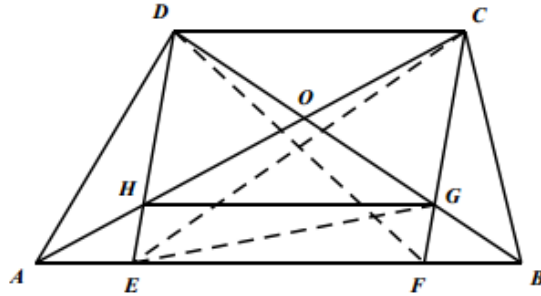
【答案】45

【解析】如图所示, 连结  $EC, EG, DF$ . 则有  $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ACE} = S_{\triangle AHE} + S_{\triangle AEHG}$ ; 同理有

$S_{\triangle BFC} = S_{\triangle BFD} = S_{\triangle BEG}$ . 所以  $S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BFC} = S_{\triangle ABGH} = 80$ . 所以,

$(AE + FB) : EF = [2 \times (S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BFC})] : S_{EFCD} = 2 : 3$ , 所以  $CD : AB = 3 : 5$ . 设  $S_{\triangle OCD} = k$ , 则

$S_{\triangle OAB} = \frac{25}{9}k$ ,  $S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OBC} = \frac{5}{3}k$ , 于是:  $k + \frac{25}{9}k + \frac{5}{3}k + \frac{5}{3}k = 320$ , 所以  $k = 45$ .



10. 某城市早 7:00 到 8:00 是高峰时段, 所有车辆的行驶速度变为原来的一半. 每天早上 6:50, 甲、乙两人从这城市的 A、B 两地同时出发, 相向而行, 在距离 A 地 24 千米的地方相遇. 如果甲晚出发 20 分钟, 两人恰好在 AB 中点相遇; 如果乙早出发 20 分钟, 两人将在距离 A 地 20 千米的地方相遇. 那么, AB 两地相距\_\_\_\_\_千米.

【答案】 42

【解析】 解法一: 设 AB 距离  $L$  千米, 甲的速度是  $v_1$  千米/分钟, 乙速  $v_2$  千米/分钟.

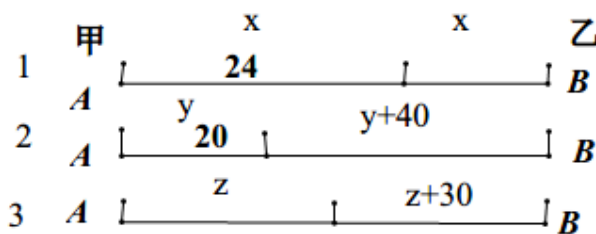
根据题意可列方程得:

$$\begin{cases} 24 = \frac{v_1}{v_1 + v_2} L \\ 20 = \frac{v_1}{v_1 + v_2} (L - 20v_2) \\ \frac{1}{2}L = \frac{v_1}{v_1 + v_2} (L - 15v_2) \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} L = 42 \\ v_1 = \frac{7}{15} \\ v_2 = \frac{7}{20} \end{cases}$$

解法二: 由于 7 点到 8 点速度是原来的一半, 则行驶相同的路程, 原来的时间相当于在 7 点和 8 点行驶了 2 倍的时间, 乙早出发 20 分钟相当于比甲多走了 40 分钟, 甲晚出发 20 分钟, 相当于比甲少行了 30 分钟, 可得如下关系:



如果行程  $1 \times 1 + \text{行程 } 2 \times 3$  相当于行程  $3 \times 4$ , 都走了 4 个全程, 即甲乙走的路程相同, 4 个全程中甲走了 2 个全程, 可得一个全程的距离为  $(24 + 20 \times 3) \div 2 = 42$  千米.

11. 在每个空格内填入数字 1~4, 使得每行和每列的数字都不重复. 表格外的数字表示该方向所在行或列里第一个奇数或者第一个偶数. 那么, 第三行的四个格从左到右组成的四位数是\_\_\_\_\_.

	3	4	2	4	
2					1
4					2
4					2
3					1
	2	3	1	2	

【答案】4213

【解析】由已知可得第一列的第2、3个数不能是2，且第一列中2在4的下面，则2只能在第4个方格，再看第一行中，第1、2、4个方格都不能是2，2只能在第3个方格，4在第4个方格，则3、1分别在第1、2个方格，然后第二列中4、2的位置也可以确定，则第三行中4只能在第1个方格，第一列中1只能在第2个方格，后面的第3、4个方格也可以确定剩下的4个数则很好确定，可得最后的答案为4213。

	3	4	2	4	
2				4	1
4					2
4					2
3	2				1
	2	3	1	2	

	3	4	2	4	
2	3	1	2	4	1
4					2
4					2
3	2	3			1
	2	3	1	2	

	3	4	2	4	
2	3	1	2	4	1
4		4			2
4		2			2
3	2	3			1
	2	3	1	2	

	3	4	2	4	
2	3	1	2	4	1
4	1	4	3	2	2
4	4	2			2
3	2	3			1
	2	3	1	2	

	3	4	2	4	
2	3	1	2	4	1
4	1	4	3	2	2
4	4	2	1	3	2
3	2	3	4	1	1
	2	3	1	2	

12. 请参考《2016年“数学花园探秘”科普活动初赛试题评选方法》作答。